確率数理工学11

マルコフ連鎖の重要な性質

- 既約性
- 再帰性
- 正再帰性
- 周期性

興味のある量

- 平均再帰時間
- 平均吸収時間

収束性

$\left\{\begin{array}{l}\text{- 定常分布} \\ \text{- 極限分布}\end{array}\right.$ ⟶ 存在？ 収束？

以降で、これらを調べる

既約性

Def (到達可能性)

$I = \{0, 1, 2, \ldots\}$：状態空間

- 状態 $j \in I$ へ状態 $i \in I$ から到達可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \leq {}^{\exists}n < \infty$ s.t. $p^{(n)}(i, j) > 0$ 　 $\boxed{i \longrightarrow j}$ と書く。

($p^{(0)}(i,i) = 1$, $p^{(0)}(i,j) = 0$ $(i \neq j)$ とする)

$n=0$ も入ってる

- i と j が相互到達可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $i \longrightarrow j$ かつ $j \longrightarrow i$ 　 $\boxed{i \longleftrightarrow j}$ と書く。

(定義より $i \longleftrightarrow i$)

Lem $i \to j,\ j \to k$ なら $i \to k$ （推移的）　//

← チェックせよ．

Thm（相互到達可能性の同値関係）

(1) 反射律：$i \longleftrightarrow i$ 　（$n=0$ で $p^{(n)}(i,i)=1>0$）

(2) 対称律：$i \longleftrightarrow j \iff j \longleftrightarrow i$

(3) 推移律：$i \longleftrightarrow j,\ j \longleftrightarrow k \Rightarrow i \longleftrightarrow k$

（証明は各自で示してもらいたい）

Def 集合 $B \subset I$ が既約 (irreducible)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall i, j \in B$ が $i \longleftrightarrow j$ をみたす．

特に I（状態空間全体）が既約なら，
そのマルコフ連鎖は既約であると言う．

Def 集合 $B \subset I$ が閉じている (closed)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall j \notin B$，$\forall i \in B$ に対し，

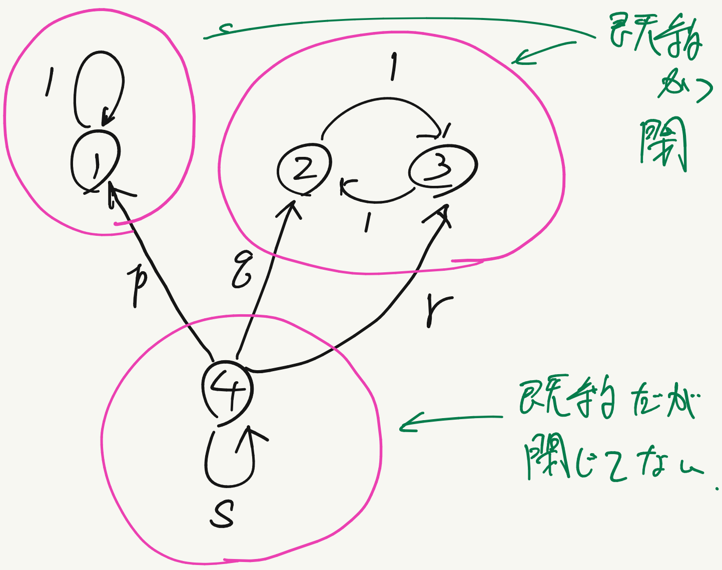
$i \not\to j$ である．（B内から外に出れない）

Ex.（同値類の例）

$I = \{1,2,3,4\}$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \end{array}$$

$(p+q+r+s=1,\ p,q,r,s>0)$



再帰性

Def (初到達時刻)

状態 $j \in I$ への初到達時刻

$$T_j \overset{\text{def}}{=} \inf\{n \geq 1 \mid X_n = j\}$$

← これは確率変数
(n=0は入っていないことに注意)

ただし、$\forall n \geq 1$ で $X_n \neq j$ なら $T_j = \infty$ とする.

$$f(i,j) = P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j = n \mid X_0 = i):$$

到達確率

Def (再帰性)

i が再帰的 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(i,i) = 1$ (必ずいつかは帰ってくる)

i が非再帰的 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(i,i) < 1$ (戻って来ないかもしれない)

$N_j \overset{\text{def}}{=}$ マルコフ連鎖が時刻 $n=1,2,\ldots$ で j を訪れる回数

$g(i,j) := P(N_j = \infty \mid X_0 = i)$ (無限回訪れる確率)

Thm

i が再帰的 $\iff$ $g(i,i) = 1$

i が非再帰的 $\iff$ $g(i,i) = 0$

※ $g(i,i)$ は 0 か 1 で中間はない

Proof

「初到達時刻の方法」: T_j の値によって事象を分割

$$P(N_i \geqq n \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geqq n \mid \underbrace{T_i = k}_{\text{時刻}k\text{で初めて}i\text{に到達}}, X_0 = j)\, P(T_i = k \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geqq n \mid T_i = k)\, P(T_i = k \mid X_0 = j)$$

(∵ Markov性, 時刻kでiにいるので
その前のことは忘れて良い)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geqq n-1 \mid X_0 = i)\, P(T_i = k \mid X_0 = j)$$

(時刻kを時刻0と書き換える. すでに1回iに来ているので
N_iのカウントを1つ減らす.)

$$= P(N_j \geqq n-1 \mid X_0 = i) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} P(T_i = k \mid X_0 = j)}_{= P(T_i < \infty \mid X_0 = j) = f(j,i)}$$

$$= P(N_j \geqq n-1 \mid X_0 = i)\, f(j,i)$$

$$\vdots$$

$$= \underbrace{P(N_j \geqq 0 \mid X_0 = i)}_{=1} f(i,i)^{n-1} f(j,i) = f(j,i)\, f(i,i)^{n-1}$$

ここで, $j=i$として, $n \to \infty$とすれば

$$\underbrace{g(i,i)}_{= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{N_j \geqq n\} \mid X_0 = i\right)} = \lim_{n\to\infty} P(N_j \geqq n \mid X_0 = i) = \begin{cases} 0 & (f(i,i) < 1) \\ 1 & (f(i,i) = 1) \end{cases}$$

//

Thm iが再帰的 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i,i) = \infty$

Proof $X_0 = i$ のとき

$$Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (X_n = i) \\ 0 & (X_n \neq i) \end{cases}$$

とおく. $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ であることに注意する(iを訪れる回数).

このとき.

単調収束

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \,\middle|\, X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[Z_n | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i,i)$$

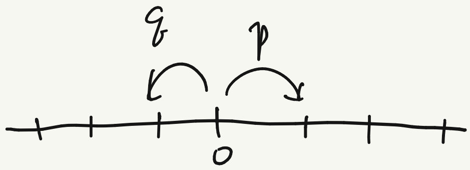
一方で. この左辺は次のようにも評価できる:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \,\middle|\, X_0 = i\right] &= E[N_i | X_0 = i] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{N_i \geq k\} \,\middle|\, X_0 = i\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(i,i)^k \end{aligned}$$

← 前の定理の証明より

よって. iが再帰的 $\iff f(i,i) = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i,i) = \infty$ //

Ex.（ランダムウォーク）



1回の推移で右に移る確率：p

1回の 〃 左 〃 ：$1-p=q$

$$p^{(2n+1)}(0,0)=0$$

$$p^{(2n)}(0,0)=\binom{2n}{n}p^nq^n=\frac{(2n)!}{n!\,n!}p^nq^n$$

（n回右，n回左）

Stirlingの公式より　$n!\fallingdotseq\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$　なので

$$p^{(2n)}(0,0)\fallingdotseq\frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}$$

ここで，$4pq\leqq 1$ で，$p=q=\frac{1}{2}$ のときのみ $4pq=1$ なので，以下をえる．

(i)　$p=q=\frac{1}{2}$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}p^{(2n)}(0,0)=\infty\longrightarrow \text{再帰的}$$

(ii)　$p\neq q$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}p^{(2n)}(0,0)<\infty\longrightarrow \text{非再帰的}$$

//

Note

- 2次元格子上のランダムウォークは再帰的（対称性は仮定）
- 3次元以上だと非再帰的

- 既約性と再帰性

再帰性は伝播する!

Lem (1) 状態 i が再帰的かつ $i \to j$ ならうも再帰的

(2) 有限で閉じた集合 A では再帰状態が少なくとも1つは存在.

(閉でも無限なら反例あり)

Proof

(1) まず $f(j,i)=1$ を示す. (特に $j \to i$)

i が再帰的なので $f(i,i)=1$ である.

$i \to j$ より, ある $i=i_0, i_1, \cdots, i_k=j$ なる経路が存在して

$$P(i,i_1)P(i_1,i_2)\cdots P(i_{k-1},j)>0$$

とできる. 今 i から j へ至り, j から i へ2度と戻らない事象を考えると,

$$0 = \underset{(iに戻らない)}{1-f(i,i)} \geq \underbrace{P(i,i_1)\cdots P(i_{k-1},j)}_{>0}\underbrace{(1-f(j,i))}_{jからiに戻らないprob}$$

$$\Longrightarrow f(j,i)=1 \text{ である.}$$

以上より $i \longleftrightarrow j$ である.

すると, ある $m,n>0$ が存在して,

$$P^{(m)}(i,j)>0, \quad P^{(n)}(j,i)>0$$

で.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P^{(n+m+k)}(j,j) \geq \sum_{k=0}^{\infty} P^{(n)}(j,i)P^{(k)}(i,i)P^{(m)}(i,j)$$

$$= \underbrace{P^{(n)}(j,i)}_{>0}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}P^{(k)}(i,i)\right)}_{=\infty}\underbrace{P^{(m)}(i,j)}_{>0}$$

($\because$ i は再帰的)

$$=\infty$$

よって, j は再帰的. //

(2) 全ての $i \in A$ が非再帰的として、矛盾を導く。

前の定理の証明より、$\forall j \in I$ に対し、

$$E[N_i | X_0 = j] = \sum_{k=1}^{\infty} f(i,i)^{k-1} f(j,i) < \infty$$

である。よって、A が有限であることより

$$\infty > \sum_{i \in A} E[N_i | X_0 = j] = E\left[\sum_{i \in A} N_i \middle| X_0 = j\right]$$

であるが、A は閉じているため、常にその中に状態 X_n はとどまるので、$\sum_{i \in A} N_i = \infty$ となるので、矛盾する。 //

<u>Thm</u> 集合 A が有限で既約かつ閉なら、A の全ての状態は再帰的である。

<u>Proof</u> Lem の(2)より、A 内に再帰的な状態が少くとも1つは含まれる。それを i とする。A は既約なので、$\forall j \in A$ に対し、$i \to j$ である。i が再帰的なので、Lem(1)より j も再帰的 //

<u>Thm</u>（一致団結の性質）

同一の同値類に属する状態は全て再帰的か、全て非再帰的かのいずれかである。 //

（$\because$ Lem (1)より、ほぼ自明）

※ 再帰性は既約成分全体の性質 $\Rightarrow$ <u>クラスの性質</u>

Thm（既約成分への分割）

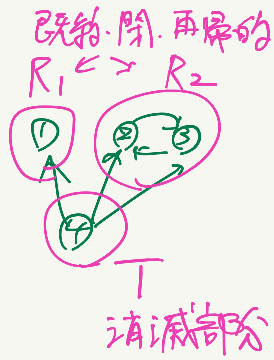
$T=\{i\in I \mid {}^{\exists}j\in I$ で $i\to j$ だが $j\not\to i\}$：消滅部分

とすると、

$I-T=R_1\cup R_2\cup\cdots \qquad (R_i\cap R_j=\phi,\ i\neq j)$

と分割できて、各 R_k は既約かつ閉。

また、I が有限なら全ての R_k は再帰的 //



Proof

$i\in I-T$ をとってきて、$C(i)=\{j\mid i\to j\}$ とおく。
（iから到達可能な領域）

$i\notin T$ より、任意の $i\to j$ なる j に対して $j\to i$ である。

つまり、${}^{\forall}j\in C(i)$ は $i\leftrightarrow j$ である。

よって、${}^{\forall}k,l\in C(i)$ は、$k\leftrightarrow i$, $l\leftrightarrow i$ であるので、$k\leftrightarrow l$ でもある。すなわち、$C(i)$ は既約。

また、$C(i)$ は閉であることがわかる。なぜなら、$j\in C(i)$ として、ある $k\in I$ に対して、$j\to k$ であるとすると、$i\to j$ であることから $i\to k$ となるので、$k\in C(i)$ である。つまり、$C(i)$ は閉。

以上より、$C(i)$ は既約かつ閉。

このようにして、各 $i\in I-T$ は既約かつ閉な集合 $C(i)$ に含まれている。もし、別の $j\in I-T$ に関する $C(j)$ が、$C(j)\cap C(i)\neq\phi$ をみたすなら、$i\leftrightarrow j$ も成り立つので、$C(i)=C(j)$ である。

よって、$I-T=R_1\cup R_2\cup\cdots$ と分割できる。

最後に、I が有限なら各 R_k も有限なので、R_k は再帰的 //
↑前のThmより

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_N \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} R_1 & R_2 & R_3 & \cdots & R_N & T \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\mathbb{P}_1 & & & & & \\
& \mathbb{P}_2 & & O & & O \\
& & \mathbb{P}_3 & & & \\
& O & & \ddots & & \\
& & & & \mathbb{P}_N & \\
\hline
Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_N & S
\end{array}\right]
\end{array}
, \quad
\mathbb{P}^n = \left[\begin{array}{cccc|c}
\mathbb{P}_1^n & & & & \\
& \mathbb{P}_2^n & & & O \\
& & \ddots & & \\
& & & \mathbb{P}_N^n & \\
\hline
* & * & \cdots & * & S^n
\end{array}\right]
$$

※ Tは消滅部分(dissipative point)と呼ぶ.

Tは前の補題より、$\forall i \in T$は非再帰的

(iが再帰的なら、$i \to j$であると$j \to i$となり、$i \notin T$となる.)